8.4 Inkluzije L^p prostora

Do sada smo razmatrali prostore $L^p(X)$, za $p \in [1, \infty]$. Mogu se definisati i $L^p(X)$ prostori za $p \in (0,1)$, to je skup funkcija f (klasa ekvivalencije funkcija jednakih s.s.) koje zadovoljavaju osobinu $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Ove prostore snabdevamo metrikom $d(f,g) = \int_X \mid f-g \mid^p \, d\mu$ u odnosu na koju $(L^p(X), d)$ postaje kompletan metrički prostor. Naglasimo da $(\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ nije norma, odnosno da metrika d nije indukovana normom, tako da $L^p(X)$, $0 < p < 1$, nisu Banahovi prostori. Dokaz kompletnosti se izvodi potpuno isto kao u Teoremi 8.1.

Napomenimo da je jedina neprekidna linearna funkcionela na $L^p(X)$, $p \in (0,1)$, nula funkcija. U Poglavlju 10.4 ćemo pokazati da je $(L^p)' = L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, za $1 \leq p < \infty$.

U ovom poglavlju ćemo se baviti pitanjem kada je $L^p \subseteq L^q$ u zavisnosti od $p < q$ ili $q < p$. Nadalje ćemo pretpostaviti da radimo sa L^p prostorima za $p \in (0, \infty]$. U narednim propozicijama oznaka $\| \cdot \|_p$ označava normu kada je $p \geq 1$, dok za $p \in (0,1)$ ona označava samo desnu stranu relacije (8.2) kao konačnu veličinu.

Propozicija 8.3. Neka je $\mu(X) < \infty$ i $0 < p < q \leq \infty$. Tada $L^q(X) \subseteq L^p(X)$ i za svako $f \in L^q(X)$ važi

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Specijalno, ako je $\mu(X) = 1$, tada $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Dokaz: Za $q = \infty$ imamo $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X)$.